Soluzioni degli esercizi del 29 giugno 2010

Esercizio 1. Ricordiamo che l'elevamento a potenza con esponente reale è ben definito quando la base è *strettamente* positiva. Quindi il dominio di f è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Osserviamo che[1]

$$\log f(x) = x \log(x^2) = 2x \log |x|.$$

Deduciamo che $\lim_{x\to 0} \log f(x) = 0$, e dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Similmente, $\lim_{x\to\pm\infty} \log f(x) = \pm\infty$. Quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La retta $y = 0$ è l'asintoto orizzontale a $-\infty$. Inoltre, non possono esistere asintoti obliqui a $+\infty$. Se infatti f avesse un comportamento lineare all'infinito, il suo logaritmo dovrebbe avere un comportamento puramente logaritmico, mentre $\log f(x) = 2x \log x$ per $x > 0$. La funzione $x \mapsto \log f(x)$ è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e vale la formula

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \begin{cases} 2\log x + 2 & \text{se } x > 0 \\ 2\log(-x) - 2 & \text{se } x < 0 \end{cases} = 2\log|x| + 2\operatorname{sign} x.$$

Abbiamo utilizzato la funzione *segno*, definita per ogni $x \neq 0$ dalla relazione

$$\operatorname{sign} x = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Pertanto

$$f'(x) = 2(x^2)^x \left(\log|x| + \operatorname{sign} x\right) \quad \text{per ogni } x \neq 0. \tag{1}$$

Dobbiamo studiare il segno di quest'ultima espressione. Conviene distinguere i due casi (i) $x > 0$ e (ii) $x < 0$.

(i) La disuguaglianza da risolvere è $\log x + 1 > 0$. Questa è risolta se e solo se $x > 1/e$. Nell'intervallo $(0, +\infty)$, la funzione f decresce da 0 a $1/e$, e poi cresce.

(ii) La disuguaglianza da risolvere è $\log(-x) - 1 > 0$. La soluzione è $-x > e$, cioè $x < -e$. Nell'intervallo $(-\infty, 0)$, la funzione f cresce fino a $-e$, e poi decresce.

Analizziamo la derivata nell'intorno di $x = 0$. Utilizzando la formula (1), vediamo che

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = -\infty = \lim_{x\to 0+} f'(x).$$

Pertanto, anche ammesso di voler prolungare per continuità la funzione f in $x = 0$, questo prolungamento è destinato ad avere un punto a tangente verticale nell'origine. Un grafico approssimato di f appare alla fine di questo file.

Esercizio 2. Si può procedere applicando iterativamente il teorema di De l'Hospital. In alternativa, si possono usare i primi termini dei polinomi di Taylor: se L denota il limite da calcolare, allora

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(\tan x)}{x^2 \sin(\tan x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x + \frac{1}{6}(\tan x)^3 + o(x^3)}{x^2(\tan x + o(x))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x - x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Esercizio 3. Procediamo per sostituzione. Posto $x = \varphi(t) = \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$, notiamo che φ è strettamente decrescente e quindi iniettiva. Inoltre

$$\arcsin \sqrt{1 - \cos^2 t} = \arcsin \sqrt{\sin^2 t} = \arcsin(\sin t) = t.$$

[1] In generale, dal grafico di $\log f$ si possono dedurre molte informazioni sul grafico di f. La discussione che segue è un esempio di questo principio.

Pertanto

$$\int_0^1 \arcsin\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\pi/2}^0 t(-\sin t)\,dt = \int_0^{\pi/2} t\sin t\,dt.$$

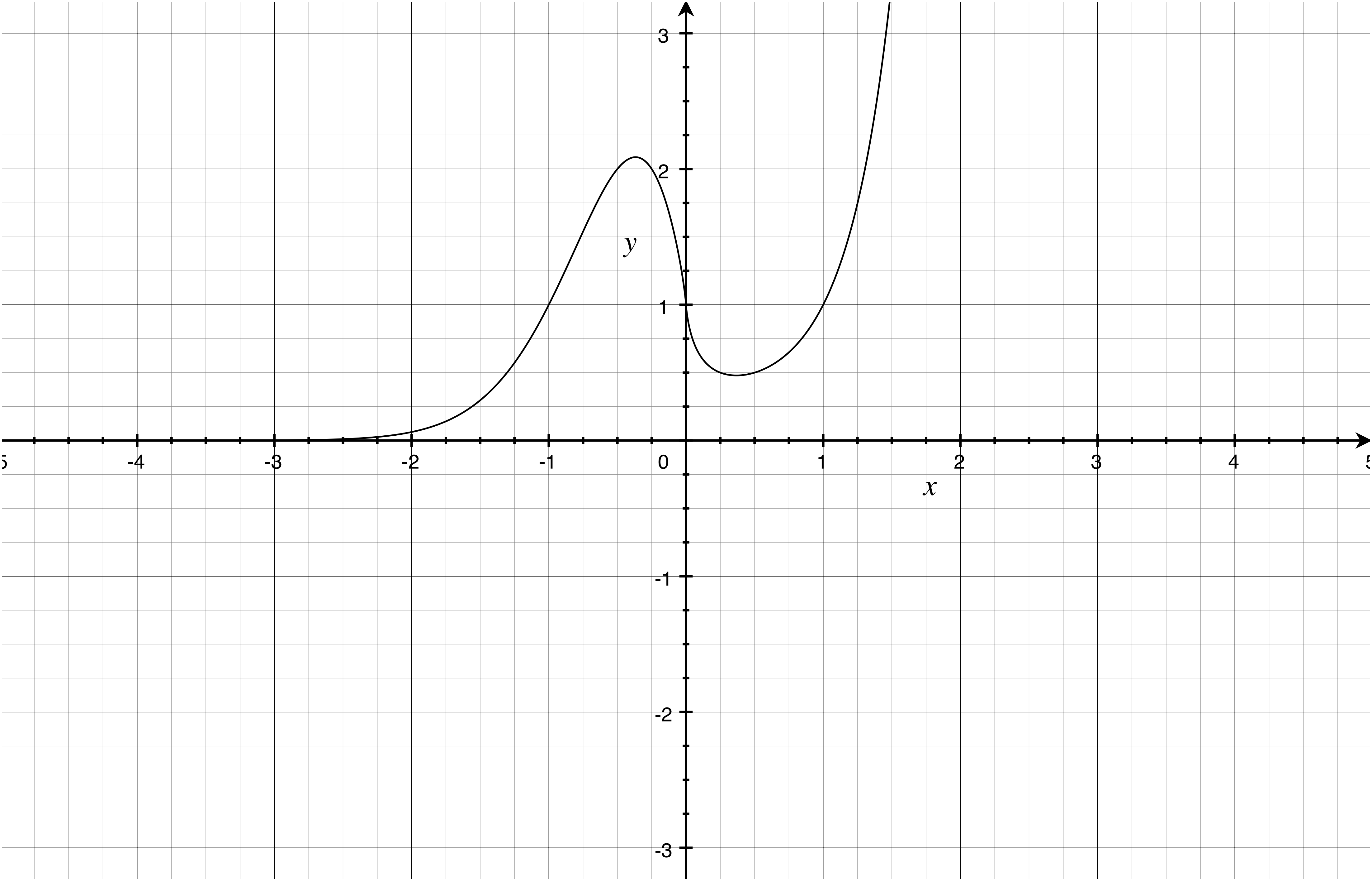
L'ultimo integrale è un *classico* dell'integrazione per parti, e finalmente si trova che

$$\int_0^1 \arcsin\sqrt{1-x^2}\,dx = [-t\cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1.$$

Esercizio 4. Consideriamo il polinomio di MacLaurin di $x \mapsto e^x$ di primo grado, con il resto di Lagrange:

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}\xi^2,$$

dove ξ è un punto opportuno compreso fra 0 e x. Dalla teoria sappiamo che $e^x = P_2(x)$, e dunque $e^x \geq 1+x$. Una soluzione alternativa utilizza le proprietà delle funzioni convesse: sappiamo che $x \mapsto e^x$ è ovunque (strettamente) convessa. La retta tangente al suo grafico in $(0,1)$ ha equazione $y = 1+x$. Dunque il grafico di $x \mapsto e^x$ deve giacere al di sopra della retta tangente, cioè $e^x \geq 1+x$. Di fatto, le due soluzioni sono equivalenti: una funzione derivabile due volte in un intervallo è convessa se e solo se la sua derivata seconda è una funzione non negativa.



3
2
y
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
x