Soluzioni degli esercizi del 4 febbraio 2010

Esercizio 1. La funzione è ovunque definita, e palesemente pari. Volendo togliere il valore assoluto,

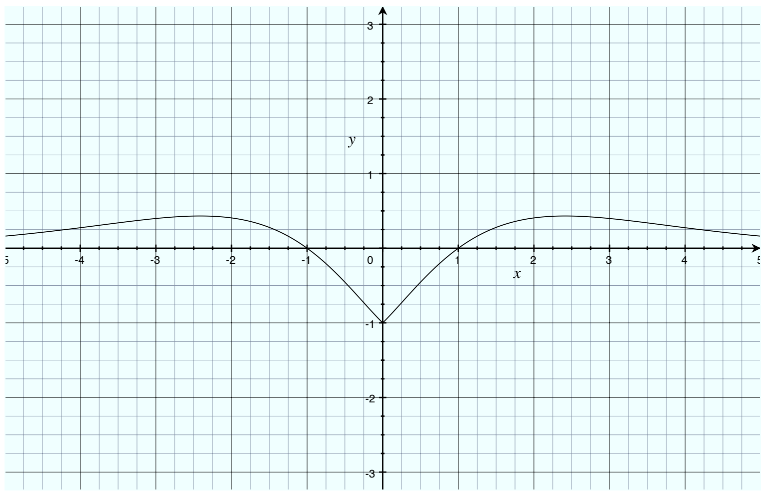
$$f(x) = \begin{cases} (x^2-1)e^{x} & \text{se } x < 0 \\ (x^2-1)e^{-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Come detto, sfrutteremo la parità di f per studiarne il comportamento sulla semiretta $[0, +\infty)$. Il comportamento all'infinito è descritto dal limite $\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)e^{-x} = 0$, ricordando il fatto che la funzione esponenziale diverge più velocemente di qualsiasi potenza. L'equazione $(x^2-1)e^{-x} = 0$ possiede in $[0, +\infty)$ la soluzione $x = 1$, e perciò f si annulla solo in $x = 1$ (ricordiamo che stiamo dando per scontata la simmetria rispetto all'asse delle ordinate). Di più, $f(x) < 0$ per ogni $x \in [0, 1)$, e $f(x) > 0$ per ogni $x > 1$. La continuità di f è un'ovvia conseguenza della continuità dei polinomi e della funzione esponenziale. Calcoliamo la derivata di f:

$$\mathrm{d}f(x) = 2xe^{-x} + (x^2-1)(-e^{-x}) = \left(-x^2+2x+1\right)e^{-x}.$$

Osservando che l'equazione $-x^2+2x+1 = 0$ è risolta (in $\mathbf{R}$) da $x = 1 \pm \sqrt{2}$, è facile verificare che f cresce in $[0, \sqrt{2}+1)$, assume un massimo (necessariamente assoluto) in $\sqrt{2}+1$, e decresce in $(\sqrt{2}+1, +\infty)$. La radice $x = 1-\sqrt{2}$ dev'essere scartata, poiché è una quantità negativa e noi ci stiamo occupando della funzione ristretta alla semiretta $[0, +\infty)$. Prima di proseguire, conviene osservare che $\lim_{x\to 0+} \mathrm{d}f(x) = 1$. Poiché il grafico di f deve essere riflesso rispetto all'asse delle ordinate, il punto $x = 0$ è un punto angoloso, con derivata sinistra uguale a -1 e derivata destra uguale a 1.

Proseguendo lo studio, calcoliamo la derivata seconda $\mathrm{d}^2 f(x) = (x^2-4x+1)e^{-x}$. Il polinomio di secondo grado x^2-4x+1 si annulla per $x = 2-\sqrt{3} > 0$ e $x = 2+\sqrt{3} > 0$. Quindi il grafico di f possiede due flessi a tangente obliqua in $[0, +\infty)$. Abbiamo ormai tutti gli ingredienti per tracciare un grafico approssimato della nostra funzione.



La funzione del primo esercizio

Esercizio 2. Forma indeterminata del tipo $[1^\infty]$. Cerchiamo di ricondurre il limite a qualche limite notevole. Osserviamo che

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1+x-2x}{1+x} = 1 - \frac{2x}{1+x}.$$

Quindi

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{2x}\frac{2x}{1+x}\frac{1}{\sin x}} = \left(\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{2x}}\right)^{\frac{2x}{1+x}\frac{1}{\sin x}}.$$

Ma
$$\lim_{x\to0+}\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{2x}}=\frac{1}{e}$$
e
$$\lim_{x\to0+}\frac{2x}{1+x}\frac{1}{\sin x}=2.$$
Concludiamo che $\lim_{x\to0+}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=1/e^2$. Il ricorso al teorema di De l'Hospital sarebbe stato possibile, ma non indispensabile: come visto, l'esercizio ha richiesto solo i due limiti notevoli $\lim_{x\to0+}(1-x)^{1/x}=1/e$ e $\lim_{x\to0+}\sin x/x=1$.

Esercizio 3. Trattandosi di un quoziente fra polinomi dello stesso grado, il primo passo consiste nel fare la divisione.
$$\frac{x^2-1}{x^2-x+1}=\frac{x^2-x+1-x-1-1}{x^2-x+1}=1+\frac{x-2}{x^2-x+1}.$$
Poosiamo concentrarci sullintegrale dell'ultima frazione. La derivata del denominatore è $2x-1$, e pertanto scriviamo
$$\frac{x-2}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{3}{2}\frac{1}{x^2-x+1}.$$
Finora abbiamo dimostrato che
$$\int\frac{x^2-1}{x^2-x+1}\,dx=\int 1\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}. \tag{1}$$
Solo l'ultimo integrale di (1) deve essere calcolato. Poiché $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$, basta porre $x-\frac{1}{2}=t$ per arrivare a
$$\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}.$$
Questo integrale è quasi immediato: $\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}+C$. Tornando alla variabile x, e sostituendo nella formula (1),
$$\int\frac{x^2-1}{x^2-x+1}\,dx=x+\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)-\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$
Ora che abbiamo le primitive, applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale:
$$\int_0^1\frac{x^2-1}{x^2-x+1}\,dx=1-\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Esercizio 4. Seguendo lo schema tipico per queste equazioni lineari, risolviamo per prima cosa l'omogenea associata $-y''+5y'-y=0$. Il polinomio caratteristico $-r^2+5r-1=0$ si annulla per
$$r=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}.$$
Quindi la soluzione generale dell'omogenea è
$$x\mapsto C_1\exp\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}x\right)+C_2\exp\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}x\right),$$
dove C_1 e C_2 sono due costanti reali qualsiasi. Dobbiamo individuare ora una soluzione particolare dell'equazione completa. Poiché la funzione a secondo membro è somma di seni e coseni, cerchiamo una soluzione

particolare $\bar{y}(x) = A\cos x + B\sin x$. Calcolando $\bar{y}'(x) = -A\sin x + B\cos x$ e $\bar{y}''(x) = -A\cos x - B\sin x$, troviamo che dev'essere

$$A\cos x + B\sin x + 5\,(-A\sin x + B\cos x) - A\cos x - B\sin x = \sin x + \cos x.$$

Quindi, uguagliando i coefficienti di seni e coseni, troviamo le due condizioni $5B = 1$ e $-5A = 1$, cioè $A = -1/5$ e $B = 1/5$. La soluzione particolare è allora $\bar{y}(x) = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$. Possiamo scrivere la soluzione generale dell'equazione proposta:

$$y(x) = C_1 \exp\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}x\right) - \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$