Soluzioni degli esercizi del 14 gennaio 2011

Esercizio 1. (i) La funzione $f(x) = \arctan x - \arctan(1/x)$ è definita e derivabile per ogni $x > 0$. La derivata vale

$$Df(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(\frac{1}{x})^2+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Quindi f è costante in $(0, +\infty)$. Per determinare tale costante, possiamo osservare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) Si integra per parti:

$$\begin{aligned}\int \arctan x\, dx &= x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.\end{aligned}$$

(iii) Usando (i) e (ii),

$$\begin{aligned}\int \arctan\frac{1}{x}\, dx &= \int \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx \\ &= \frac{\pi}{2}x - \int \arctan x\, dx \\ &= \frac{\pi}{2}x - x\arctan x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.\end{aligned}$$

Esercizio 2. È un'equazione lineare, non omogenea, dei primo ordine. Ricordiamo che la soluzione dell'equazione generale $y' = a(x)y + b(x)$ si scrive

$$y = e^{A(x)}\left(\int e^{-A(x)}b(x)\, dx + C\right).$$

Per noi $a(x) = \sin x$, $b(x) = -\sin x$, $A(x) = -\cos x$, $\int e^{-A(x)}b(x)\, dx = -\int e^{\cos x}\sin x\, dx = e^{\cos x}$. La soluzione è pertanto

$$y = e^{-\cos x}\left(e^{\cos x} + C\right) = Ce^{-\cos x} + 1.$$

Esercizio 3. La funzione è definita per tutti i numeri $x \neq 1$ tali che l'espressione sotto radice sia maggiore o uguale a zero. Studiando il segno di x^3 e di $x - 1$, si trova che il dominio è $A = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$. Agli estremi del dominio di definizione, sussistono le relazioni di limite

$$\lim_{x\to1+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

La nostra funzione è derivabile, e la derivata coincide con

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{(2x-3)x^2}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}.$$

Tale derivata si annulla per $x = 0$ e $x = 3/2$. Il segno della derivata è il segno del binomio $2x - 3$, dunque f è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(1, 3/2)$, mentre è crescente in $(0, 1)$. Allora il punto $x = 0$ è un minimo relativo, e così anche il punto $x = 3/2$. Si ha $f(0) = 0$ e $f(3/2) = 3\sqrt{3}/2$.

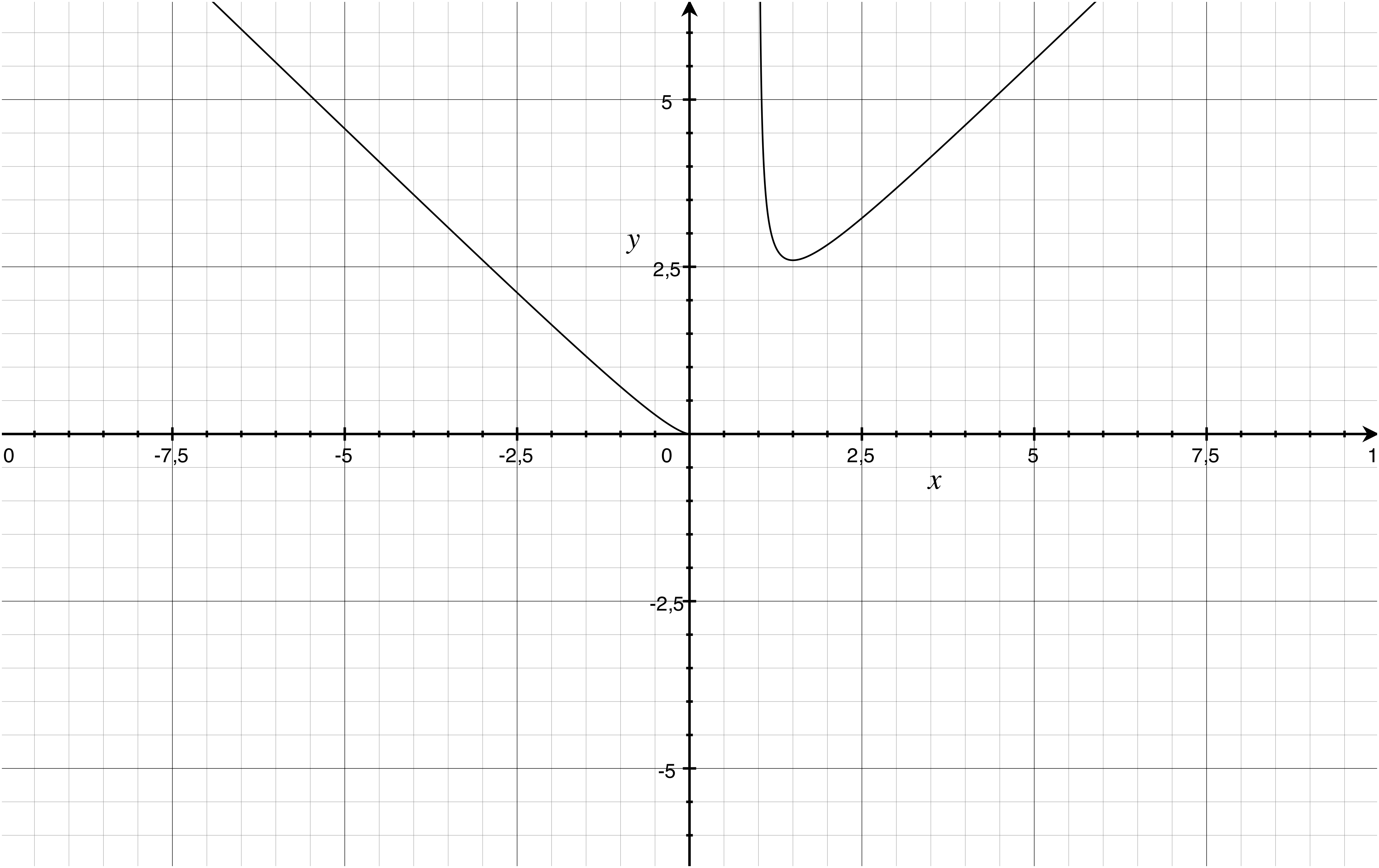
Usando le note definizioni, si verifica che la retta di equazione $y = -x - 1/2$ è l'asintoto obliquo per $x \to -\infty$, mentre $y = x + 1/2$ è l'asintoto per $x \to +\infty$.

Volendo si può calcolare anche la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{x}{x-1}\right)^4\left(\frac{x^3}{x-1}\right)^{-3/2}.$$

Questo garantisce che la funzione è convessa sia in $(-\infty, 0)$ che in $(1, +\infty)$.

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per tracciare un grafico qualitativo della nostra funzione, riportato nell'ultima pagina.


y
x
5
2,5
-2,5
-5
0
-7,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
1