Soluzioni degli esercizi

8 aprile 2010

Esercizio 1. La funzione $f(x) = x - 3\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$ è chiaramente definita su tutto l'asse reale $\mathbb{R}$, ed è ovunque continua e derivabile. Quindi è esclusa l'esistenza di asintoti verticali. Poiché

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

non esistono nemmeno asintoti orizzontali. Ricordando che $\lim_{x\to\pm\infty}\arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$, si conclude immediatamente che la retta $y = x - \frac{3\pi\sqrt{2}}{2}$ è l'asintoto obliquo della funzione f per $x \to +\infty$, mentre $y = x + \frac{3\pi\sqrt{2}}{2}$ è l'asintoto per $x \to -\infty$. Qui abbiamo fatto uso della seguente osservazione: se $f(x) = mx + g(x)$, e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = q \in \mathbb{R}$, allora $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per f. Infatti $f(x) - (mx+q) = mx + g(x) - (mx+q) = g(x) - q \to 0$ per $x \to \infty$. Essendo impossibile la determinazione esatta delle intersezioni con l'asse delle ascisse, passiamo allo studio della derivata prima:

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2}.$$

Siamo fortunati: il denominatore è sempre (definito e) strettamente positivo. Quindi la monotonia di f è goevrnata dal segno del numeratore. Poiché $x^2 - 3 = (x-2)(x+2) \geq 0$ se e solo se $x \leq -2$ oppure $x \geq 2$, concludiamo che f cresce fino a -2, assume ivi un massimo, inizia a decrescere fino a 2, assume ivi un minimo, e poi riprende a crescere. Il massimo ed il minimo sono necessariamente relativi, poiché la nostra funzione non è limitata né dall'alto né dal basso. Altrettanto semplice è il calcolo della derivata seconda

$$f''(x) = \frac{12x}{(x^2+2)^2}.$$

Vediamo subito che $x = 0$ è l'unico punto di flesso, necessariamente a tangente obliqua (poiché la derivata prima è positiva in $x = 0$). Abbiamo tutti gli ingredienti necessari a tracciare un grafico approssimato.

Esercizio 2. Per il calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt}{x}$$

esistono due approcci possibili, essenzialmente equivalenti. Per cominciare, notiamo che la funzione $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ è limitata, ed anzi prolungabile con continuità in $t = 0$. Quindi il numeratore tende a zero per $x \to 0$, così come il denominatore. Alla forma indeterminata $[0/0]$ possiamo applicare il teorema di De l'Hospital congiuntamente al teorema fondamentale del calcolo integrale. Ci serve pertanto calcolare (se esiste) il limite del rapporto fra la derivata del numeratore e la derivata del denominatore:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - \frac{\sin x}{x}}{1} = 0 - 1 = -1.$$

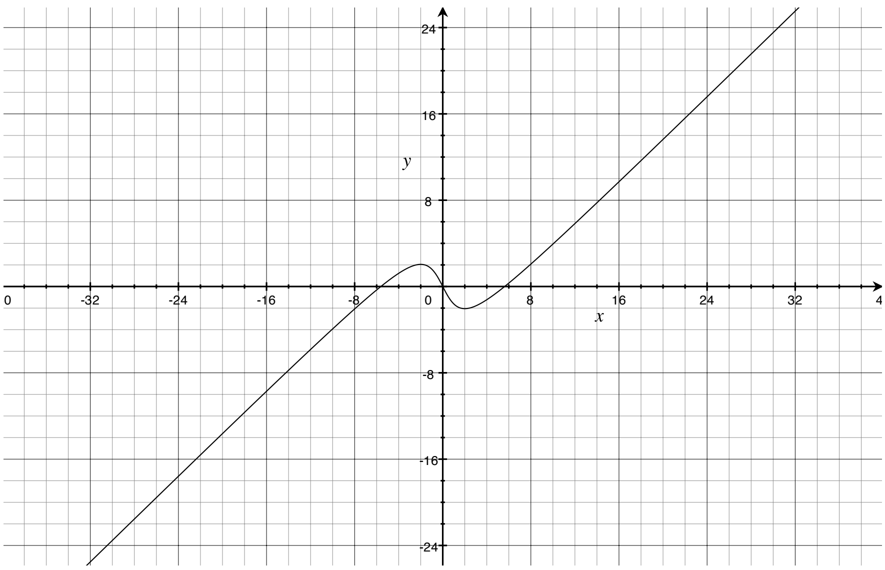

Figura 1: La funzione del primo esercizio

Concludiamo allora che il limite originario vale anch'esso -1.

Un approccio leggermente diverso, ma non troppo, consiste nell'usare il polinomio di Taylor *dentro l'integrale*. Senza troppe formalità, sappiamo che $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \dots$ per $t \to 0$. Quindi

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \dots$$

Ne deduciamo[1] che

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \dots\right) dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

Pertanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots}{x} = -1.$$

Esercizio 3. Il calcolo dell'integrale indefinito $\int x \arctan x \, dx$ è un classico dell'integrazione per parti. Si considera x come una derivata, e quindi

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx.$$

Nell'ultimo integrale basta aggiungere e sottrarre 1:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \arctan x + C.$$

Ricapitolando,

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + C.$$

[1] Si tratta di un'affermazione impegnativa che andrebbe verificata rigorosamente.

Esercizio 4. L'insieme A è semplicemente l'insieme delle soluzioni della disequazione $e^{x^2-3} \leq 1$. Questa equivale a $x^2 - 3 \leq 0$, cioè $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$. L'insieme B è l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sin x \geq 1/2$, limitatamente agli angoli compresi fra $-\pi/2$ e $\pi/2$. Quindi $\pi/6 \leq x \leq \pi/2$. Deduciamo che

$$A \cap B = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right], \quad A \cup B = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

Ormai è immediato calcolare $\sup(A \cap B) = \pi/2$ e $\sup(A \cup B) = \sqrt{3}$.