Soluzioni degli esercizi del 14 gennaio 2011

Esercizio 1. Risolviamo questo limite mediante i soliti limiti notevoli per il seno e il logaritmo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+x^3}{4x+5\log(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+x^3}{4x+5x^2}=\frac{1}{2}.$$

Esercizio 2. (i) Il dominio "naturale" di definizione è $(-\infty,+\infty)$: infatti il segno di valore assoluto rende la radice quadrata sempre calcolabile. I limiti agli estremi si calcolano razionalizzando:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}=0,\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$$

Dunque $y=0$ è l'asintoto destro. Verifichiamo l'esistenza di un asintoto obliquo sinistro:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-1\right)=-2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+2x=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}=0,$$

sicché $y=-2x$ è l'asintoto obliquo sinistro.

(ii) È sufficiente risolvere la disequazione $\sqrt{|x^2-4|}-x\geq 0$. Osserviamo che la disequazione è certamente verificata per $x<0$. Per $x\geq 0$, distinguiamo due casi: $x^2-4<0$ (cioè $0\leq x<2$) e $x^2-4\geq 0$ (cioè $x\geq 2$). Sia $0\leq x<2$, elevando al quadrato si ha

$$4-x^2\geq x^2 \Leftrightarrow x^2-2\leq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq\sqrt{2}.$$

Sia $x\geq 2$, elevando al quadrato si ha $x^2-4\geq x^2$ che non è mai verificata. In conclusione, la funzione si annulla solo per $x=\sqrt{2}$, è strettamente positiva per $x<\sqrt{2}$ e strettamente negativa per $x>\sqrt{2}$.

(iii) Poiché

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}-x & \text{se } -2<x<2\\ \sqrt{x^2-4}-x & \text{se } x\leq -2 \text{ o } x\geq 2,\end{cases}$$

si ha

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}-1 & \text{se } -2<x<2\\ \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-1 & \text{se } x<-2 \text{ o } x>2.\end{cases}$$

Per $-2<x<2$, $f'(x)\geq 0$ se $x+\sqrt{4-x^2}\leq 0$, ovvero $\sqrt{4-x^2}\leq -x$. La disequazione non è verificata per alcun valore di $x\geq 0$; per $-2<x<0$, elevando al quadrato si ha

$$4-x^2\leq x^2\Leftrightarrow x^2-2\geq 0\Leftrightarrow -2\leq x\leq-\sqrt{2}.$$

Quindi $f'(x)=0$ per $x=-\sqrt{2}$, $f'(x)>0$ per $-2<x<-\sqrt{2}$, e $f'(x)<0$ per $-\sqrt{2}<x<2$.

Se $x<-2$ oppure $x>2$, $f'(x)\geq 0$ se $x-\sqrt{x^2-4}\geq 0$ ovvero $\sqrt{x^2-4}\leq x$. La disequazione non è verificata per alcun valore di $x<-2$; per $x>2$, elevando al quadrato si ha $x^2\geq x^2-4$ che è sempre verificata. Quindi $f'(x)>0$ per $x>2$ e $f'(x)<0$ per $x<-2$.

In conclusione f risulta decrescente negli intervalli $(-\infty,2]$ e $[-\sqrt{2},2]$, crescente negli intervalli $[-2,-\sqrt{2}]$ e $[2,+\infty)$. I punti $x=\pm 2$ sono punti di minimo relativo, il punto $x=-\sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo. Le ordinate valgono $f(-2)=2$, $f(2)=-2$ e $f(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$. Quindi $x=2$ è più precisamente un punto di minimo assoluto.

(iv) La funzione f è continua su tutto il suo dominio in quanto composizione di funzioni elementari continue. Per lo studio della derivabilità, è sufficiente esaminare il comportamento di f' per $x\to\pm 2$. Poiché

$$\lim_{x\to\pm 2} f'(x)=\infty,$$

la funzione non è derivabile nei punti $x = \pm 2$.

(v) Il grafico è riportato nella figura in ultima pagina.

Esercizio 3. L'esercizio richiede di calcolare il limite della successione $\{p_n\}_n$ definita dalla formula

$$p_n = \int_0^{2\pi} x \cos(nx)\, dx.$$

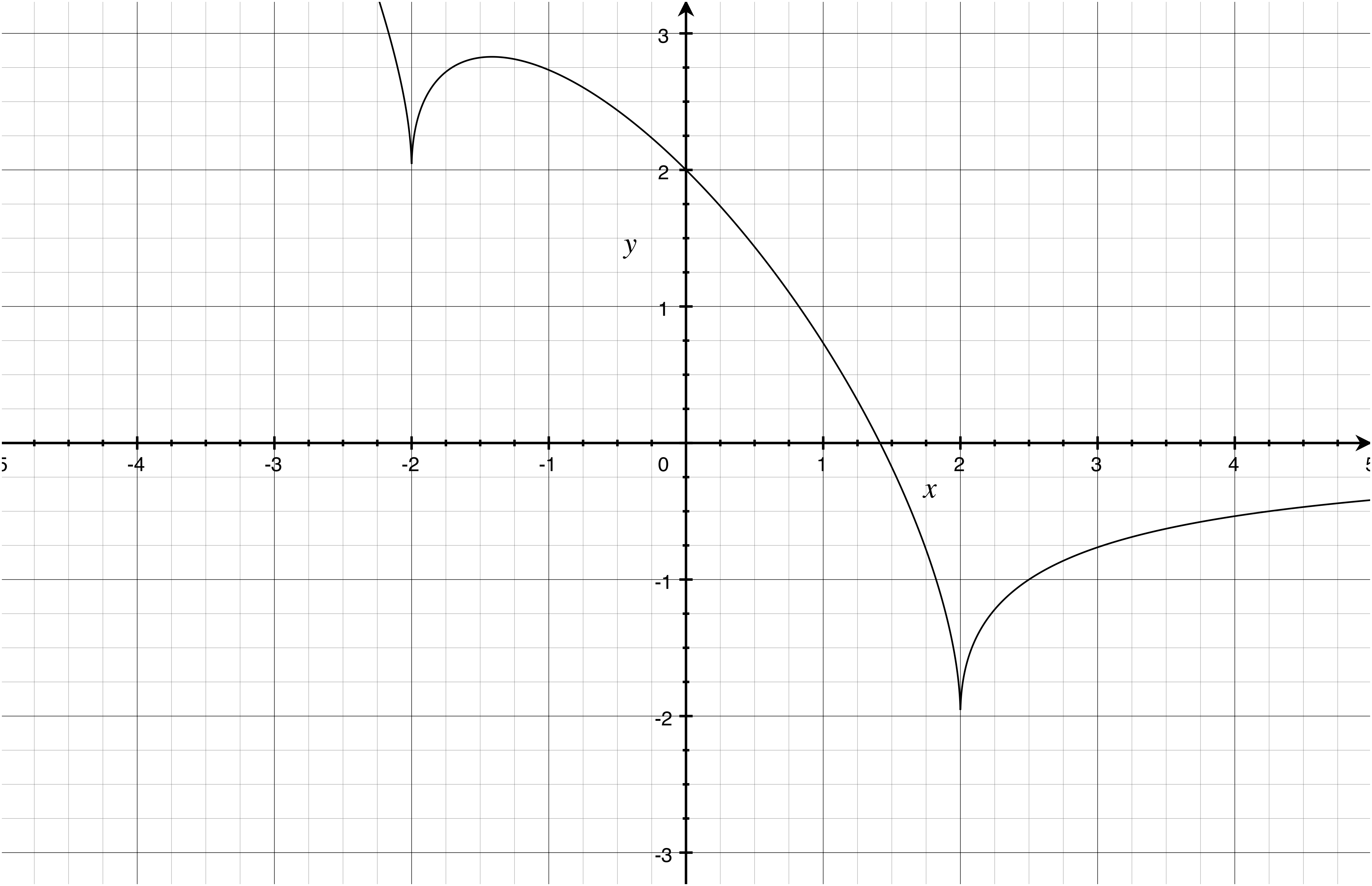
Calcoliamo l'integrale procedendo per parti:

$$\int x \cos(nx)\, dx = \frac{x}{n} \sin(nx) - \frac{1}{n} \int \sin(nx)\, dx = \frac{x}{n} \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx) + C.$$

Ma allora

$$p_n = \left[\frac{x}{n} \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Essendo una successione costante, $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0$.



3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
1
2
3
4
5
y
x