Soluzioni degli esercizi del 4 febbraio 2010

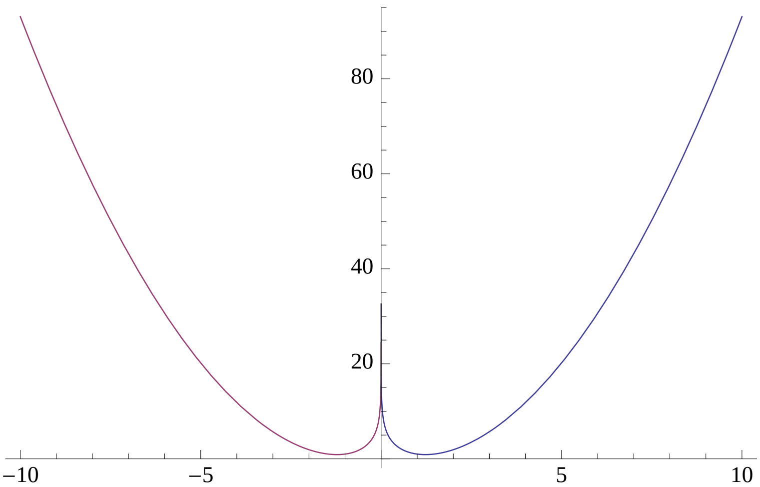
Esercizio 1. La funzione f è palesemente una funzione pari: $f(-x) = (-x)^2 - 3\log|-x| = x^2 - 3\log|x| = f(x)$. Ci limitiamo dunque a studiarla sulla semiretta $[0, +\infty)$, ricordandoci infine di "ribaltare" il grafico rispetto all'asse verticale. Se x è positivo, allora $f(x) = x^2 - 3\log x$. Dobbiamo escludere $x = 0$, e perciò il dominio di definizione è $(0, +\infty)$. Ricordando il comportamento del logaritmo vicino a zero, si vede che $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$. Invece, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ per la gerarchia degli infiniti. La retta $x = 0$ è l'unico asintoto verticale. Osservando che

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} x - \frac{3\log x}{x} = +\infty,$$

non possono esistere asintoti obliqui. Non è facile individuare eventuali intersezioni con l'asse orizzontale, quindi soprassediamo. La funzione f è continua e derivabile (infinite volte) nel dominio di definizione, e possiamo calcolare

$$f'(x) = 2x - \frac{3}{x} = \frac{2x^2 - 3}{x}.$$

Il denominatore è sempre positivo nel dominio di definizione, mentre il segno del numeratore è positivo per $x > \sqrt{3/2}$. Dunque il punto $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\log\frac{3}{2})$ è l'unico punto di minimo assoluto. Lo studio della convessità è facilissimo: $f''(x) = 2 + \frac{3}{x^2} > 0$ per ogni x, e perciò f è una funzione (strettamente) convessa in $(0, +\infty)$. **Attenzione:** sarebbe scorretto affermare che f è convessa in tutto $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Infatti la definizione di convessità non tollera che il dominio di definizione abbia uno o più "buchi". Abbiamo tutti gli ingredienti per tracciare un grafico approssimato della funzione f. A causa del fattore di scala, l'asintoto verticale $x = 0$ non è ben visibile.



La funzione del primo esercizio

Esercizio 2. Il modo più rapido per risolvere questo esercizio è inserire i polinomi di Taylor di seno e coseno nel numeratore. Poiché il denominatore è x^4, dobbiamo arrivare almeno fino alla quarta potenza di x nei due polinomi. Per fortuna non è difficile, dal momento che seno e coseno hanno polinomi di Taylor con molti "buchi": $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$ e $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$

Inserendo questi sviluppi e seplificando i monomi simili, si trova che il limite coincide con

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \dots}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Esercizio 3. L'integrale $\int x\sqrt{1+2x^2}\,dx$ è quasi immediato. Infatti, posto $t = 1+2x^2$, ricaviamo che $dt = 4x\,dx$, cioè $\frac{1}{4}dt = x\,dx$. Sostituendo,

$$\int x\sqrt{1+2x^2}\,dx = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{1}{6}(1+2x^2)^{3/2} + C.$$

Il secondo integrale, definito, può essere calcolato ancora per sostituzione. Ponendo $t = 1+\cos x$, cioè $dt = -\sin x\,dx$, arriviamo a

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+\cos x}}\,dx = -\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = -\int t^{-\frac{1}{3}}\,dt = -\frac{3}{2}t^{2/3} + C = -\frac{3}{2}(1+\cos x)^{2/3} + C.$$

Valutando quest'ultima formula per $x = 1$ e per $x = -1$, il teorema fondamentale del calcolo integrale ci dice che $\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+\cos x}}\,dx = 0$.

Tuttavia, il risultato sarebbe stato banale fin dall'inizio, se avessimo notato che la funzione $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+\cos x}}$ è continua e *dispari*. Perciò il suo integrale definito esteso ad un intervallo simmetrico quale $[-1,1]$ deve fare per forza zero.

Esercizio 4. Per quanto mascherato, l'esercizio richiede semplicemente di risolvere due disequazioni di secondo grado. Poiché $x^2 \leq 9$ equivale a $-3 \leq x \leq 3$, possiamo dire che $V = [-3,3]$. Per dare un aspetto più esplicito a U, notiamo che, se $x \neq 0$,

$$\frac{x^2+x}{x^2-x} \leq 1 \iff \frac{x+1}{x-1} \leq 1 \iff \frac{x+1-x+1}{x-1} \leq 0.$$

Dobbiamo trovare le soluzioni della disequazione $\frac{2}{x-1} \leq 0$. Poiché il numeratore è una quantità positiva e indipendente da x, ci basta chiedere che $x-1 < 0$. Quindi la soluzione è $U = (-\infty,-1) \setminus \{0\}$. Ora abbiamo tutti gli ingredienti per concludere che $U \cup V = (-\infty,0) \cup (0,3]$ e $U \cap V = [-3,0) \cup (0,1)$.